Berechnungsmodell für abgestrahlten Körperschall
Dr. Markus Ringger, Gruner AG

1 Einleitung

Bei der Berechnung des abgestrahlten Körperschalls geht man in einem Raum davon aus, dass mit Hilfe eines allgemein gültigen Transferspektrums der Schalldruckpegel im Raum aus den Vibrationen am Boden berechnet werden kann. Das Modell VIBRA 2 arbeitet mit einem solchen Spektrum. Misst man aber in einer konkreten Situation, dann stellt man sehr oft grosse Abweichung zwischen Messung und Berechnung fest.

Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass dem Raum selbst zu wenig Beachtung geschenkt wird, und er als rein passives System angesehen wird. Wie ich zeigen werde, ist dies nicht der Fall. Der Raum selbst hat innere Freiheitsgrade, die berücksichtig werden müssen, wenn eine genauere Prognose gelingen soll.

Mit dem vorliegenden Modell möchte ich aufzeigen, auf welchem Weg eine genauere Prognose gelingen könnte. An einem konkreten Beispiel zeige ich, dass eine genauere wenn noch nicht perfekte Prognose möglich ist.

2 Raum-Moden

Ein Raum selbst ist ein schwingendes System von sog. Raum-Moden, ähnlich den Eigenschwingungen einer Platte. Die Summe der Moden beschreibt vollständig die akustischen Eigenschaften des Raumes. Die Moden ergeben sich aus den Randbedingungen an den Begrenzungsflächen. Für eine schallharte Wand ist die Randbedingung, dass die Schall-Schnelle senkrecht zur Wand verschwinden muss.

Hermann Weyl[A] hatte bewiesen, dass jeder Raum Moden besitzt, und die Dichte der Moden (Moden pro Frequenz) asymptotisch nur eine Funktion des Volumens ist. Die Berechnung der Moden für eine beliebige Raumform aber ist kompliziert, und deshalb betrachten wir hier nur Rechteckräume, deren Moden einfach zu berechnen sind. Aufgrund des Weyl'schen Satzes besitzen die Schlussfolgerungen aber Allgemeingültigkeit.

Für den Rechteckraum der Dimensionen L_x, L_y und L_z ergeben sich die Frequenzen der Raummoden zu:

$$f_{l,m,n} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2}$$

und die Form der Moden ist:

$$\Psi_{l,m,n}(x,y,z) = \psi_0 \cdot cos\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right) \cdot cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \cdot cos\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right)$$

Man kann die Moden als 3-Tupel (l,m,n) klassifizieren. Für einen Rechteckraum der Dimension L_x =7.85 m, L_y = 6.80 m und L_z = 2.50 m sieht die Schalldruck-Verteilung für den (5,3,0)-Mode wie folgt aus:

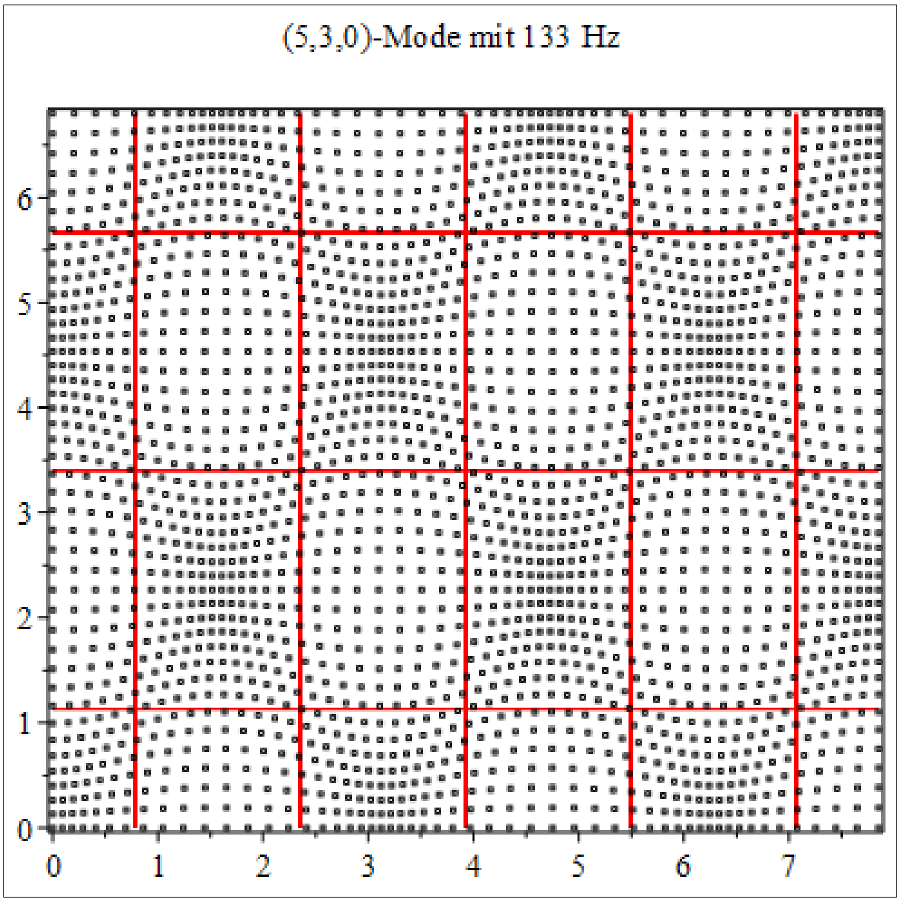

Abbildung 1 Idealisierte Bewegung der Luftmoleküle beim (5,3,0) Mode. Moleküle eng beisammen: Schall-Ueberdruck; Moleküle weit entfernt: Schall-Unterdruck. Die roten Linien sind die Knotenlinien, wo der Schall-Druck Null ist. Diese sind jeweils ¼-Wellenlänge von der Raumbegrenzung entfernt.

Jede Schwingung des Raumes kann als Summe von Moden beschrieben werden, wobei die Modendichte mit der Frequenz schnell ansteigt. Die Modendichte in Abhängigkeit der Frequenz ergibt sich für den Rechteckraum zu:

$$\frac{d}{df} n_{total}(f) = \frac{4\pi V f^2}{c_0^3} + \frac{1}{2}\frac{\pi S f}{c_0^2} + \frac{1}{8}\frac{L}{c_0}$$

mit: V: Volumen
S: Oberfläche
L: Summe von L_x, L_y und L_z

Das ergibt für ein Wohnzimmer von 4·5 m^2 im 100 Hz Terz-Band etwa 7 Moden und für ein Kinderzimmer von 3·4 m^2 noch 4 Moden. Im 1'000 Hz Terz-Band besitzt das Wohnzimmer 3'700 Moden. Der erste mögliche Mode ist bei der Frequenz:

$$f = \frac{c_0}{2 \cdot L_{max}}$$

mit: c_0: Schallgeschwindigkeit
L_{max}: Grösste Ausdehnung des Raumes

Für das Wohnzimmer ist dies 43 Hz und für das Kinderzimmer f = 57 Hz.

Wird ein Mode angeregt, so verliert er durch Dämpfung Energie. Diese Dämpfung entspricht der Nachhallzeit. Sowohl bei der Messung als auch bei der Anregung muss der Form des Mode Beachtung geschenkt werden. In einem Bauch misst man einen maximalen, im Knoten keinen Schalldruckegel. Das gleiche gilt für die Anregung. Ein Raum wird unterschiedlich angeregt, je nachdem wo der Lautsprecher zu stehen kommt. Jeder Mode hat in mindestens einer von beliebigen zweien, diagonal gegenüberliegenden Ecken, ein Maximum.

3 Statistical Energy Analysis SEA

Wenn ein Zug vorbeifährt, wechselwirken die Schwingmoden des Bodens, der Decke und der Wände mit den Raummoden. Wenn viele Moden beteiligt sind, kann die Interaktion zwischen den Moden statistisch behandelt werden. In den späten 50-iger Jahren wurde dazu eine Technik entwickelt, die sich Statistical Energy Analysis (SEA) nennt[B].

Existieren in einem Frequenzbereich $\Delta\omega$ (z.B. Terzband) in einem Subsystem (Raum oder Bauteil) sehr viele Moden, d.h. ist die Modendichte $\frac{N}{\Delta\omega}$ sehr hoch, so kann gezeigt werden, dass sich die Energie E gleichmässig auf die Moden verteilt. Dies ist ähnlich der Thermodynamik, wo die thermische Energie gleichmässig auf alle Freiheitsgrade eines Körpers verteilt ist. Die Energie pro Mode $\mathcal{E} = \frac{E}{N}$ (modale Energie) in der SEA entspricht der Temperatur in der Thermodynamik. Stehen nun zwei Subsysteme schwach gekoppelt in Kontakt, dann fliesst Energie vom Subsystem mit der höheren modalen Energie in das Subsystem mit der geringeren modalen Energie.

Für die SEA sind für jedes Subsystem i die folgenden 4 Parameter im Frequenzband wichtig:

- Modale Energie $\mathcal{E}_i$ oder Gesamtenergie E_i
- Anzahl der Moden N_i
- Kopplungs-Grad $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ oder Kopplungs-Verlust-Grad η_{ij} für die Stärke der Kopplung der Subsysteme
- Innerer Verlust-Grad η_i für die Stärke des Energieverlustes durch Reibung, Absorption etc. im Subsystem

Die Energieflüsse für zwei schwach gekoppelte Subsysteme 1 und 2 ergeben sich zu:

- Innere Verluste: $\Pi_{1,diss} = \omega\eta_1 E_1$ und $\Pi_{2,diss} = \omega\eta_2 E_2$
- Energieaustausch: $\Pi_{12} = \omega\beta_{12}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$

Meist sind wir nicht an der modalen Energie, sondern an der Gesamt-Energie interessiert, da diese direkter der Messung zugänglich ist. Man definiert deshalb sog. Kopplungs-Verlust-Grade $\eta_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{N_i}$, so dass für den Energieaustausch auch geschrieben werden kann:

$$\Pi_{12} = \omega(\eta_{12}E_1 - \eta_{21}E_2)$$

Es ergeben sich folgende Energiebilanzen:

- Subsystem 1: $\Pi_{1,in} + \Pi_{2,1} = \Pi_{1,diss} + \frac{dE_1}{dt}$
- Subsystem 2: $\Pi_{2,in} + \Pi_{1,2} = \Pi_{2,diss} + \frac{dE_2}{dt}$

Wenn nun die inneren Verlust-Grade und die Kopplungs-Verlust-Grade sowie die Anzahl der Moden bekannt sind, können die Energie-Niveaus in jedem System berechnet werden. Für die

Berechnung des Gleichgewichtszustandes ist $\frac{dE_1}{dt} = \frac{dE_2}{dt} = 0$ zu setzen. Meist fliesst von Aussen nur einem Subsystem Energie zu (z.B. ins Subsystem 1), sodass gilt: $\Pi_{2,in} = 0$.

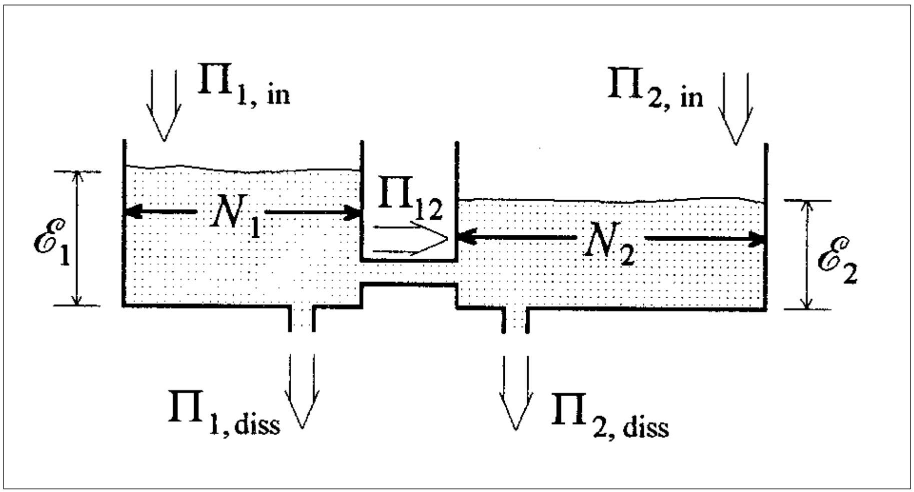

Abbildung 2 Das Prinzip der SEA ist recht anschaulich in obiger Grafik erläutert (aus [A]).

Für den einfachen Fall einer Wand und eines Raumes ergibt sich aus dem SEA Modell für den Raumpegel L_p:

$$L_p = L_{<v>} + 10 \cdot Log\left(\frac{S}{1\,m^2}\right) + 10 \cdot Log(\sigma) + 10 \cdot Log(\frac{A}{4\,m^2})$$

mit: L_v: Mittlerem Schnelle-Pegel der Wand (Referenzwert $5 \cdot 10^{-8}\frac{m}{s}$)
S: Wandfläche
A: Energieäquivalente Schall-Absorptionsfläche im Raum
σ: Abstrahlgrad

Der Abstrahlgrad wird z.B. in [C] wie folgt angegeben:

$$\sigma = \frac{U \cdot c_0}{S \cdot \pi^2}\sqrt{\frac{f}{f_g^3}} \quad f\ddot{u}r\ f < \frac{1}{2}f_g$$

$$\sigma = 0.45\sqrt{\frac{U \cdot f_g}{c_0}} \quad f\ddot{u}r\ f = f_g$$

$$\sigma = 1.2 \quad f\ddot{u}r\ f > f_g$$

mit: U: Umfang
S: Fläche
f_g: Grenzfrequenz

Die obige Formel ist für Terzband-Mittenfrequenzen anzuwenden: für f_g ist die Mittenfrequenz des Terzbandes zu nehmen, in welchem die Grenzfrequenz liegt, zwischen $\frac{f_g}{2}$ und f_g ist linear zu extrapolieren.

Es ist noch speziell darauf hinzuweisen, dass im SEA Modell die Energie der Moden und nicht ihre Schalldrücke zur Gesamtenergie zusammengezählt werden. Dies in der Annahme, dass die einzelnen Moden nicht korreliert sind.

4 Beispiel

In einem leeren Raum der Grösse 12·12·6 m^3 sind Messungen von Zugsvorbeifahrten gemacht worden. Dabei wurden die Erschütterungen auf dem Boden und die Raumpegel gemessen.

Abbildung 3 Raum der Dimension 12·12·6 m^3, wo gemessen wurde. Die Wände und Decken bestehen aus rohem Beton.

Die Auswertung der Messung ergab nun grosse Abweichungen zwischen der Messung und der Rechnung. Die Raumpegel waren weit höher als erwartet.

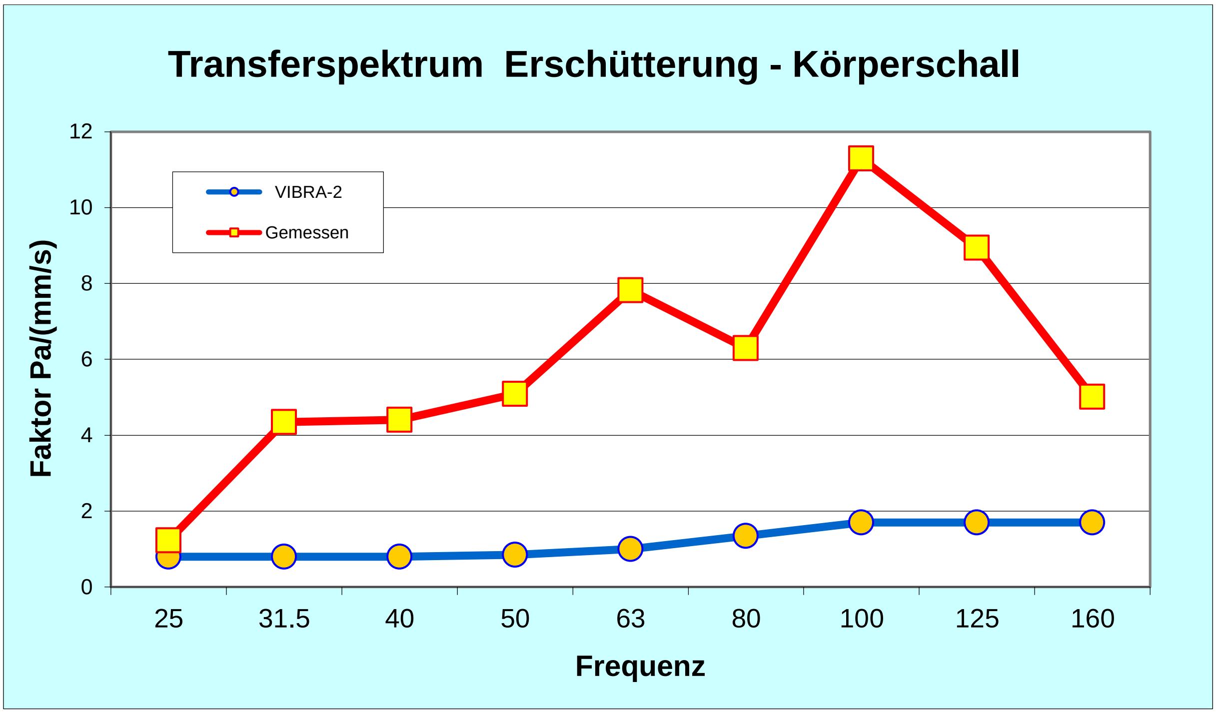

Abbildung 4 Transferspektren der Messung und der Rechnung zwischen Erschütterung und Raumpegel

Betrachtet man die Verteilung der Moden des Raumes im Bereich von 20 Hz bis 250 Hz, so fällt natürlich auf, dass aufgrund der ungünstigen Dimensionen viele Mode dieselbe Frequenz haben.

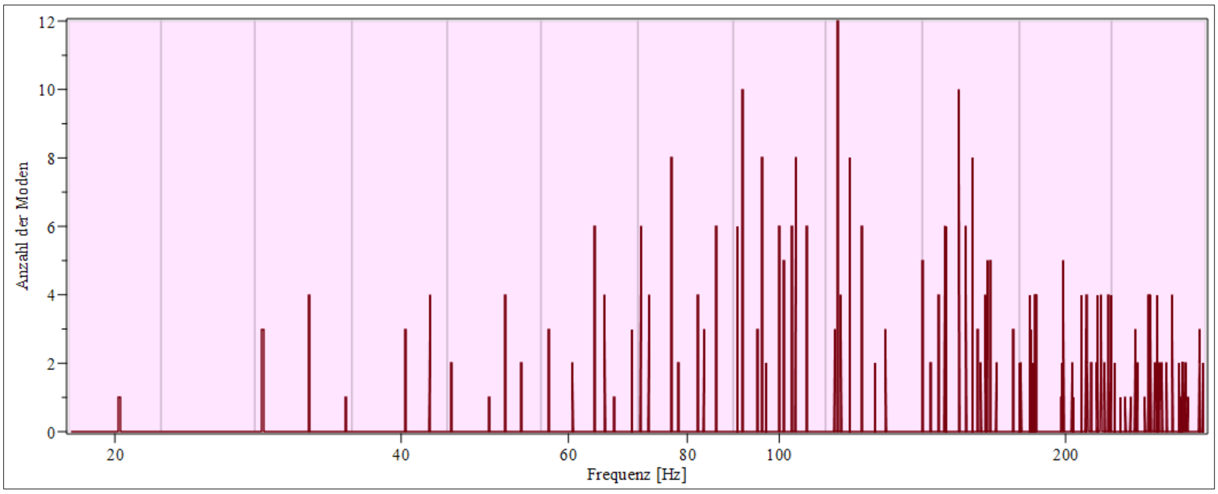

Abbildung 5 Verteilung der Moden und Anzahl der Moden bei derselben Frequenz.

Wenn Moden dieselbe Frequenz haben, sind diese als korreliert zu betrachten, d.h. um die Energie der Moden zusammenzuzählen, müssen die Schall-Drucke und nicht die Energie addiert werden. Damit erhöht sich die Energie im Terzband aufgrund der Korrelation um folgende Korrelations-Korrektur:

$$10 \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{\sum_n N_n^2}{\sum_n N_n}\right)$$

mit: n: Anzahl der Frequenzen im Terzband, wo mindestens ein Mode vorhanden ist
N_n: Anzahl der Moden bei dieser Frequenz

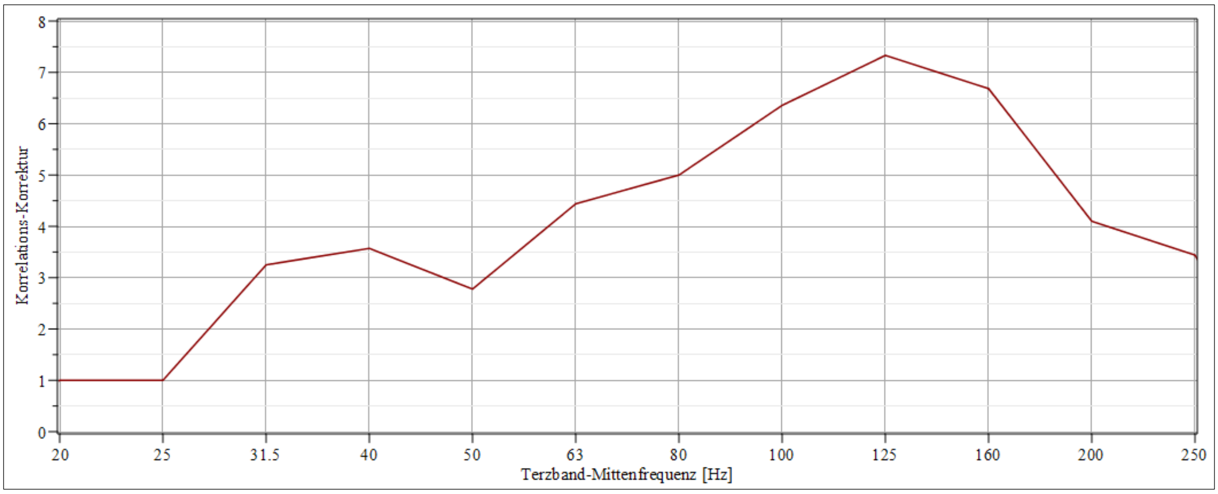

Abbildung 6 Korrelations-Korrektur

Damit ergibt sich für die Transferfunktion unter der Annahme einer Nachhallzeit von 2.0 s für das SEA Modell mit Korrelations-Korrektur:

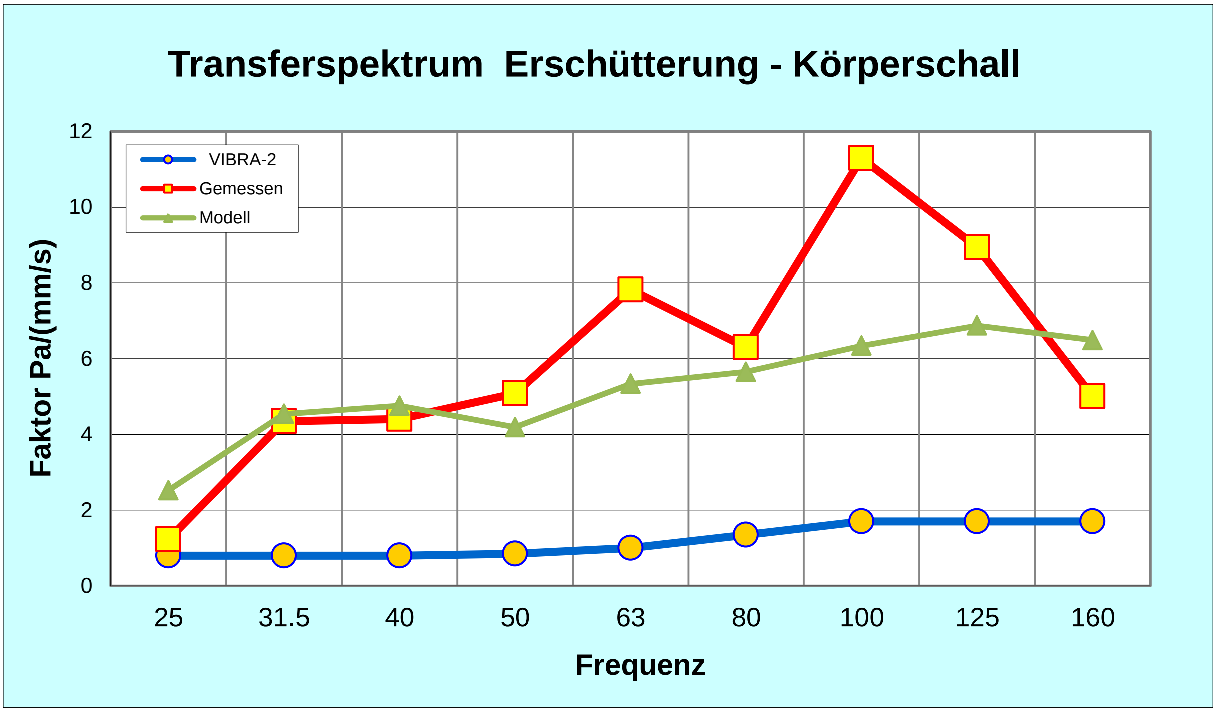

Abbildung 7 SEA Modell mit Korrelations-Korrektur (grau)

Das SEA Modell zeigt ausser bei 63 Hz und 100 Hz eine gute Uebereinstimmung mit der Messung.

5 Schlussfolgerungen

Die obigen Erläuterungen sollen aufzeigen, dass zum Verständnis des abgestrahlten Körperschalls den Eigenschaften des Raumes Beachtung geschenkt werden muss. Dabei kann das SEA Modell, sofern die Modendicht gross genug ist, ein Ansatz für die bessere Vorhersage sein. Um den Ansatz weiter zu validieren oder zu falsifizieren schlage ich folgendes vor:

- Der abgestrahlter Körperschall sollte immer in 2 diagonal gegenüberliegenden Ecken gemessen werden. Dies vor allem in den üblichen kleineren Räumen (Wohnzimmer, Kinderzimmer). Damit entfällt die Unsicherheit in Bezug auf den Ort des Mikrophons im Verhältnis zu den Bäuchen der Moden.
- Es ist immer die Nachhallzeit zu messen.
- Wo liegt in der Praxis die untere Frequenz-Grenze für die SEA, d.h. welche minimale Modendichte ist notwendig?
- Kann unterhalb dieser Frequenz-Grenze ein Modell basierend auf einzelnen Moden bessere Prognosen liefern?
- Kann SEA helfen, die Ausbreitung von Erschütterungen im Gebäude zu prognostizieren?

Quellen

[A] Hermann Weyl, «Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)», Math. Ann. 71, 441 (1911)

[B] Richard H.Lyon and Richard G. DeJong, *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, Butterworth-Heinemann, Boston 1995; ISBN 0-7506-9111-5

[C] L.Cremer und M.Heckl, *Körperschall: Physikalische Grundlagen und Technische Anwendungen*, Springer, Heidelberg 2010; ISBN 978-3-540-40336-4